अनुक्रमांक ____________________

नाम ____________________

4628718

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 12

131

324(IY)

2025

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारंभ में स्पष्टत: उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

General Instructions :

(i) There are in all **nine** questions in this question paper.

(ii) **All** questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) यदि $f : R \to R, f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ द्वारा प्रदत्त है, तो $fof(x)$ बराबर है : 1

(A) $x^{\frac{1}{3}}$

(B) x^3

(C) x

(D) $(3 - x^3)$

(ख) समुच्चय N में सम्बन्ध R निम्नवत् परिभाषित है : 1

$R = \{(x, y) : x = y - 3, y > 3\}$

तब निम्नलिखित में से कौन सही है ?

(A) $(2, 4) \in R$

(B) $(5, 8) \in R$

(C) $(3, 7) \in R$

(D) $(1, 5) \in R$

(ग) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$ का मान होगा : 1

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{12}$

(घ) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y\cos x = 0$ की कोटि है : 1

(A) 2

(B) 3

(C) 0

(D) परिभाषित नहीं है ।

(ङ) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान है : 1

(A) π

(B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

1. Do all the parts :

Select the correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) If $f : R \to R$, is given by $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, then $fof(x)$ is equal to : 1

(A) $x^{\frac{1}{3}}$

(B) x^3

(C) x

(D) $(3 - x^3)$

(b) A relation R is defined in the set N as follows : 1

$R = \{(x, y) : x = y - 3, y > 3\}$

Then which of the following is correct ?

(A) $(2, 4) \in R$

(B) $(5, 8) \in R$

(C) $(3, 7) \in R$

(D) $(1, 5) \in R$

4628718

(c) The value of $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ will be : 1

4628718

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{12}$

4628718

(d) The order of differential equation $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y \cos x = 0$ is : 1

(A) 2

(B) 3

(C) 0

(D) Not defined

4628718

(e) The value of $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is : 1

(A) π

(B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए । 1

(ख) क्या फलन $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{यदि } x \le 1 \\ x-5 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ $x = 1$ पर संतत है ? 1

(ग) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y \cdot \sin x = 0$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए । 1

(घ) दो बिन्दुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्या ज्ञात कीजिए । 1

(ङ) यदि P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, तो P(A/B) का मान ज्ञात कीजिए यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं । 1

2. Do **all** the parts :

(a) Find the principal value of $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$. 1

(b) Does the function $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{if } x \le 1 \\ x-5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ continuous at $x = 1$? 1

(c) Find the order and degree of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y\cdot\sin x=0$ 1

(d) Find the direction cosines of a line joining two points (–2, 4, –5) and (1, 2, 3). 1

(e) If P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, then find P(A/B) if A and B are independent events. 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा A + A′ = I, तो α का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ख) यदि $y=x^{x^{x-\text{ad inf}}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log x}$ 2

(ग) रेखा-युग्मों

$\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4}$ और

$\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए । 2

(घ) कोटि n के दो व्युत्क्रमणीय आव्यूहों A और B के लिये सिद्ध कीजिए कि $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 2

3. Do **all** the parts :

(a) If $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ and A + A′ = I, then find the value of α. 2

(b) If $y=x^{x^{x-\text{ad inf}}}$, then prove that $x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log x}$ 2

(c) Find the angle between pair of lines

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4} \text{ and } \frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$$ 2

(d) For two invertible matrices A and B of order n, prove that

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दिखाइए कि प्रदत्त फलन $f(x) = \cos x$: $(\pi, 2\pi)$ में वर्धमान है। 2

(ख) यदि $[a_{ij}] = 2i - j$ हो, तो 2×3 क्रम का एक आव्यूह A ज्ञात कीजिए। 2

(ग) उस समान्तर-चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं। 2

(घ) एक घन का आयतन 9 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 10 cm है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ? 2

4. Do all the parts :

(a) Show that the given function $f(x) = \cos x$ is increasing in $(\pi, 2\pi)$. 2

(b) If $[a_{ij}] = 2i - j$, then determine a matrix A of order 2×3. 2

(c) Find the area of a parallelogram whose adjacent sides are given by vectors

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. 2

(d) Volume of a cube is increasing at the rate of 9 cm^3/s. If length of its edge is 10 cm, then its surface area is increasing with which rate ? 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध क्या तुल्यता सम्बन्ध है ? **5**

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए। **5**

(ग) यदि $-1 < x < 1$ के लिये $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ **5**

(घ) रेखा-युग्मों

$\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ और

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

5. Do all the parts :

(a) Does the relation defined by $R = \{(x, y) : y$ is divisible by $x\}$ on the set $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, an equivalence relation ? **5**

(b) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. **5**

(c) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ for $-1 < x < 1$, then prove that :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$ 5

(d) Find the angle between the pair of lines :

$\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ and

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$. 5

(e) Find the shortest distance between the lines :

$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श-रेखा और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए । 5

(ख) परवलय $y^2 = 4\,ax$ और उसके नाभि लम्ब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ग) अवकल समीकरण $ydx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए । 5

(घ) व्यवरोधों $5x + 3y \leq 15$, $2x + 5y \leq 10$ तथा $x \geq 0$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 8x + 5y$ का अधिकतम मान आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए । 5

(ङ) बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियाँ और एक लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के, एक लड़की और 3 लड़के हैं । प्रत्येक समूह से यादृच्छया एक बच्चा चुना जाता है । तीनों चुने गये बच्चों में एक लड़की एवं 2 लड़के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

6. Do **all** the parts :

(a) Find the equations of the tangent and normal to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ at the point (1, 1). **5**

(b) Find the area of the region enclosed by the parabola $y^2 = 4\,ax$ and its latus rectum. **5**

(c) Solve the differential equation $ydx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ **5**

(d) Find the maximum value of $Z = 8x + 5y$ under the constraints $5x + 3y \leq 15$, $2x + 5y \leq 10$ and $x \geq 0, y \geq 0$ by graphical method. **5**

(e) There are three group of children having 3 girls and one boy, 2 girls and 2 boys, one girl and 3 boys respectively. One child is selected at random from each group. Find the probability that three selected children has one girl and 2 boys. **5**

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A \cdot adj(A) = |A|\,I$ तथा A^{-1} ज्ञात कीजिए । **8**

(ख) आव्यूह विधि से निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$x + y + z = 6$

$y + 3z = 11$

$x + z = 2y$ **8**

7. Do any **one** part :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then verify that $A \cdot adj(A) = |A|\,I$ and find A^{-1}. **8**

(b) Solve the following system of linear equations by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$$x + z = 2y$$ 8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

(ख) दिखाइए कि :

$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, जहाँ c_1, c_2 अचर हैं, अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 - b^2)\,y = 0$ का हल है। 8

8. Do any one part :

(a) Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ 8

(b) Show that :

$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, where c_1, c_2 are constants, is a solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 - b^2)\,y = 0$. 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए : $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x)\,dx = -\pi \log_e 2$ 8

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x, (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है

कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$ 8

9. Do any **one** part :

(a) Prove that : $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x)\, dx = -\pi \log_e 2$ **8**

(b) Find particular solution of differential equation

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x, (x \neq 0)$ it is given that $y = 0$ if $x = \frac{\pi}{2}$. **8**