This Question Paper consists of 45 questions and 20 printed pages, and a graph sheet.
इस प्रश्न-पत्र में 45 प्रश्न तथा 20 मुद्रित पृष्ठ हैं और एक ग्राफ शीट है।

Roll No. / अनुक्रमांक | | | | | | | | | | | | |

Code No. 69/MAY/4
कोड नं०

Set / सेट B

MATHEMATICS
गणित
(311)

Day and Date of Examination ....
(परीक्षा का दिन व दिनांक)

Signature of Invigilators 1. ....
(निरीक्षकों के हस्ताक्षर)

2. ....

General Instructions **:**

1. Candidate must write his/her Roll Number on the first page of the Question Paper.
2. Please check the Question Paper to verify that the total pages and total number of questions contained in the Question Paper are the same as those printed on the top of the first page. Also check to see that the questions are in sequential order.
3. Making any identification mark in the Answer-Book or writing Roll Number anywhere other than the specified places will lead to disqualification of the candidate.
4. Write your Question Paper Code No. 69/MAY/4, Set B on the Answer-Book.
5. (a) The Question Paper is in English/Hindi medium only. However, if you wish, you can answer in any one of the languages listed below :

   English, Hindi, Urdu, Punjabi, Bengali, Tamil, Malayalam, Kannada, Telugu, Marathi, Odia, Gujarati, Konkani, Manipuri, Assamese, Nepali, Kashmiri, Sanskrit and Sindhi.

   You are required to indicate the language you have chosen to answer in the box provided in the Answer-Book.

   (b) If you choose to write the answer in the language other than Hindi and English, the responsibility for any errors/mistakes in understanding the questions will be yours only.
6. In case of any doubt or confusion in the Question Paper, the **English** version will prevail.

सामान्य अनुदेश :

1. परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें।

2. कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि प्रश्न-पत्र के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है। इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं।

3. उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जाएगा।

4. अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पत्र का कोड नं० 69/MAY/4, सेट [B] लिखें।

5. (क) प्रश्न-पत्र केवल हिन्दी/अंग्रेजी में है। फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं :

   अंग्रेजी, हिन्दी, उर्दू, पंजाबी, बंगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगू, मराठी, उड़िया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिन्धी।

   कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं।

   (ख) यदि आप हिन्दी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं, तो प्रश्नों को समझने में होने वाली त्रुटियों/गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी।

6. प्रश्न-पत्र में किसी भी प्रकार के संदेह अथवा दुविधा की स्थिति में **अंग्रेजी** अनुवाद ही मान्य होगा।

MATHEMATICS

गणित

(311)

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे] [पूर्णांक : 100

Note : (i) This Question Paper consists of 45 questions in all.

(ii) *All* questions are compulsory.

(iii) Marks are given against each question.

(iv) Section–A consists of

(a) Question Nos. **1** to **20** (multiple choice type questions (MCQs) carrying *1* mark each). Select and write the most appropriate option out of the four options given in each of these questions.

(b) Question Nos. **21** to **29** (objective type questions). Question Nos. **21** to **24** carry *2* marks each (with 2 sub-parts of *1* mark each), Question Nos. **25** to **28** carry *4* marks each (with 4 sub-parts of *1* mark each) and Question No. **29** carries *6* marks (with 6 sub-parts of *1* mark each). Attempt these questions as per the instructions given for each.

(v) Section–B consists of

(a) Question Nos. **30** to **38** (very short answer type questions carrying *2* marks each)

(b) Question Nos. **39** to **43** (short answer type questions carrying *4* marks each)

(c) Question Nos. **44** and **45** (long answer type questions carrying *6* marks each)

An internal choice has been provided in some of these questions in Section—B. You have to attempt only one of the given choices in such questions.

निर्देश : (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल 45 प्रश्न हैं।

(ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(iv) खण्ड–अ में सम्मिलित हैं

(a) प्रश्न संख्या **1** से **20** (बहुविकल्पी प्रकार के प्रश्न (MCQs), प्रत्येक *1* अंक का)। प्रत्येक प्रश्न में दिए गए चार विकल्पों में से सबसे उपयुक्त विकल्प को चुनकर लिखना है।

(b) प्रश्न संख्या **21** से **29** (वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न)। प्रश्न संख्या **21** से **24** तक प्रत्येक *2* अंक का है (जिसमें 2 उपभाग हैं, प्रत्येक *1* अंक का), प्रश्न संख्या **25** से **28** तक प्रत्येक *4* अंक का है (जिसमें 4 उपभाग हैं, प्रत्येक *1* अंक का) तथा प्रश्न संख्या **29** के लिए *6* अंक दिए गए हैं (जिसमें 6 उपभाग हैं, प्रत्येक *1* अंक का)। प्रत्येक के लिए दिए गए निर्देश के अनुसार इन प्रश्नों को हल कीजिए।

(v) खण्ड–ब में सम्मिलित हैं

(a) प्रश्न संख्या **30** से **38** (अति लघूत्तरीय प्रकार के प्रश्न, प्रत्येक *2* अंक का)

(b) प्रश्न संख्या **39** से **43** (लघूत्तरीय प्रकार के प्रश्न, प्रत्येक *4* अंक का)

(c) प्रश्न संख्या **44** और **45** (दीर्घ–उत्तरीय प्रकार के प्रश्न, प्रत्येक *6* अंक का)

खण्ड–ब के कुछ प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिया गया है। ऐसे प्रश्नों में दिए गए विकल्पों में से किसी एक को चुनना है।

(1) Answers of all questions are to be given in the Answer-Book given to you.
सभी प्रश्नों के उत्तर आपको दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।

(2) 15 minutes time has been allotted to read this Question Paper. The Question Paper will be distributed at 2:15 p.m. From 2:15 p.m. to 2:30 p.m., the students will read the Question Paper only and will not write any answer on the Answer-Book during this period.
इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण दोपहर में 2:15 बजे किया जाएगा। दोपहर 2:15 बजे से 2:30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।

SECTION–A

खण्ड–अ

1. Given set $A = \{1, 2, 3\}$. A reflexive relation in set A is

समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ दिया गया है। समुच्चय A पर एक स्वतुल्य संबंध है

(A) $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$

(B) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(C) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$

(D) $R = \{(3, 1), (2, 1), (1, 1)\}$ 1

2. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, then A^{-1} is

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} है

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 1

3. The value of k, for which the matrix $\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is invertible, is

k का वह मान, जिसके लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय है, है

(A) $k = \frac{2}{3}$

(B) $k \neq \frac{2}{3}$

(C) $k \neq \frac{3}{2}$

(D) $k = \frac{3}{2}$ 1

4. The value of the determinant $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ is

सारणिक $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ का मान है

(A) 0

(B) 1

(C) –3

(D) –27 1

5. If $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then the value of α is

यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ और $A + A' = I$ है, तो α का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ 1

6. If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then $(I + A)^2 - 3A$ is equal to

यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसके लिए $A^2 = A$ है, तो $(I + A)^2 - 3A$ बराबर है

(A) I (B) $2A$

(C) $3I$ (D) A 1

7. The distance of the point $(4, -6)$ from the line $4x - 5y - 32 = 0$ is

रेखा $4x - 5y - 32 = 0$ से बिन्दु $(4, -6)$ की दूरी है

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{14}{41}$

(C) $\frac{7}{5}$ (D) $\frac{14}{\sqrt{41}}$ 1

8. Given a function f as $f(x) = 5x + 4$, $x \in R$. If $g : R \to R$ is inverse of f, then

एक फलन f, $f(x) = 5x + 4$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित है। यदि $g : R \to R$, f का प्रतिलोम है, तो

(A) $g(x) = 4x + 5$

(B) $g(x) = \frac{5}{4x - 5}$

(C) $g(x) = \frac{x - 4}{5}$

(D) $g(x) = 5x - 4$ 1

9. If $\int 2^x dx = f(x) + C$, then $f(x)$ is

यदि $\int 2^x dx = f(x) + C$ है, तो $f(x)$ है

(A) 2^x

(B) $2x \log_e 2$

(C) $\frac{2^x}{\log_e 2}$

(D) $\frac{2^{x+1}}{x + 1}$ 1

10. The local minimum value of $y = x^3 - 3x + 2$ in the interval [0, 2] is

अन्तराल [0, 2] में $y = x^3 - 3x + 2$ का स्थानीय निम्निष्ठ मान है

(A) 6

(B) 4

(C) 2

(D) 0 1

11. If $f(x) = e^x$ and $g(x) = \log_e x$, then $(g \circ f)'(x)$ is

यदि $f(x) = e^x$ तथा $g(x) = \log_e x$, तो $(g \circ f)'(x)$ है

(A) 0

(B) 1

(C) e

(D) $1 + e$ 1

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}$ is equal to

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}$ बराबर है

(A) 1

(B) −1

(C) 0

(D) None of these
इनमें से कोई नहीं 1

13. If $y = \cot x^\circ$, then $\frac{dy}{dx}$ is

यदि $y = \cot x^\circ$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ है

(A) $\operatorname{cosec} x^\circ$

(B) $\operatorname{cosec} x^\circ \cdot \cot x^\circ$

(C) $-1^\circ \operatorname{cosec}^2 x^\circ$

(D) $-1^\circ \operatorname{cosec} x^\circ \cdot \cot x^\circ$ 1

14. The integrating factor of the differential equation $(x - y^3)dy + ydx = 0$ is
अवकल समीकरण $(x - y^3)dy + ydx = 0$ का समाकलन गुणक है

(A) $-x$

(B) $\log x$

(C) y

(D) $-y$ 1

15. The distance of the plane $3x - 4y + 12z = 3$ from the origin is

(A) $\frac{3}{13}$ unit

(B) $\frac{19}{13}$ units

(C) 3 units

(D) 1 unit 1

मूलबिन्दु से समतल $3x - 4y + 12z = 3$ की दूरी है

(A) $\frac{3}{13}$ इकाई

(B) $\frac{19}{13}$ इकाई

(C) 3 इकाई

(D) 1 इकाई

16. If for non-zero vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ is a unit vector and $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, then the angle between the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is

यदि शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $\vec{a} \times \vec{b}$ एक एकक सदिश है और $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$ है, तो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $-\frac{\pi}{2}$ 1

17. The intercept cut by the plane $2x - y + 2z + 7 = 0$ on the x-axis is

समतल $2x - y + 2z + 7 = 0$ द्वारा x-अक्ष पर काटा गया अंतःखंड है

(A) 2 (B) $\frac{7}{2}$

(C) $-\frac{7}{2}$ (D) –2 1

18. The value of p, for which $p(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ is a unit vector, is

p का मान, जिसके लिए $p(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ एक एकक सदिश है, है

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\pm\sqrt{3}$ 1

19. Of all the points of the feasible region for maximum or minimum of the objective function, the point lies

(A) inside the feasible region

(B) at the boundary line of the feasible region

(C) at the corner point of the boundary of the feasible region

(D) None of the above 1

उद्देश्य फलन का अधिकतम अथवा न्यूनतम, सुसंगत क्षेत्र के उस बिंदु पर होता है, जो

(A) सुसंगत क्षेत्र के अन्दर होता है

(B) सुसंगत क्षेत्र की सीमारेखा (boundary line) पर होता है

(C) सुसंगत क्षेत्र की सीमा के कोने पर होता है

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

20. The value of $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} + \hat{i} \cdot \hat{j}$ is

$(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} + \hat{i} \cdot \hat{j}$ का मान है

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) –1 1

21. Match Column—I with the right option of Column—II : 1×2=2

Column—I	*Column—II*
(a) The coordinates of the point on the parabola $y^2 = 8x$, whose focal distance is 4, are	P. $2\sqrt{2}$
(b) The sum of the distances of any point on the ellipse $3x^2 + 4y^2 = 24$ from its foci is	Q. (2, –4)
	R. $4\sqrt{2}$
	S. (–2, 4)

स्तंभ—I को स्तंभ—II के सही विकल्प से मिलाइए :

स्तंभ—I	**स्तंभ—II**
(a) परवलय $y^2 = 8x$ के उस बिन्दु के निर्देशांक, जिसकी नाभि से दूरी 4 है, हैं	P. $2\sqrt{2}$
(b) दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 24$ पर स्थित किसी बिन्दु की अपनी नाभियों से दूरियों का योग है	Q. (2, –4)
	R. $4\sqrt{2}$
	S. (–2, 4)

22. Answer the following questions : $1\times2=2$

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) If $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+2x+1}$, then find its maximum value.

यदि $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+2x+1}$ है, तो इसका अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

(b) Using differentials, find the approximate value of $\sqrt{49\cdot5}$.

अवकलों का प्रयोग करके $\sqrt{49\cdot5}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

23. Write *True* for correct statements and *False* for incorrect statements : $1\times2=2$

सही कथन के लिए **सत्य** और गलत कथन के लिए **असत्य** लिखिए :

(a) If $y=500\,e^{7x}+600\,e^{-7x}$, then $\dfrac{d^2y}{dx^2}=49y$.

यदि $y=500\,e^{7x}+600\,e^{-7x}$ है, तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}=49y$.

(b) $\int_2^3 3^x\,dx=18$

24. Fill in the blanks : $1\times2=2$

रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) If $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$, $x(\neq1)\in R$, then the range of f is _____.

यदि $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$, $x(\neq1)\in R$, तो f का परिसर है _____.

(b) If $f:R\to R$ is defined as $f(x)=2x^3-1$, then f^{-1} is _____, if f^{-1} exists.

यदि $f:R\to R$, $f(x)=2x^3-1$ द्वारा परिभाषित है, तो f^{-1} है _____, यदि f^{-1} का अस्तित्व है।

25. Write *True* for correct statements and *False* for incorrect statements : 1×4=4

सही कथन के लिए **सत्य** और गलत कथन के लिए **असत्य** लिखिए :

(a) Rolle's theorem is applicable for the function $f(x) = x$ in the interval [–1, 1].

फलन $f(x) = x$ के लिए अन्तराल [–1, 1] पर रोले का प्रमेय वैध है।

(b) $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \log x)$

(c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 1$

(d) If p and q are the degree and order of the differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3} = 4$$

respectively, then $(2p - 3q)$ is (–2).

यदि p और q क्रमशः निम्न अवकल समीकरण की घात एवं कोटि हैं, तो $(2p - 3q)$ होता है (–2) :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3} = 4$$

26. Fill in the blanks : 1×4=4

रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) The equation of the line which passes through the point (1, –2) and cuts off equal intercepts on the axes is _____.

बिन्दु (1, –2) से होकर जाने वाली और निर्देशांक अक्षों पर बराबर के अन्तःखंड काटने वाली रेखा का समीकरण है _____.

(b) The radius of the circle $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$ is _____.

वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$ की त्रिज्या है _____.

(c) The length of the latus rectum of the parabola $y^2 = 24x$ is _____.

परवलय $y^2 = 24x$ के नाभिलम्ब की लंबाई _____ है।

(d) The eccentricity of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, which passes through the points (3, 0) and $(3\sqrt{2}, 2)$, is _____.

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, जो बिन्दुओं (3, 0) और $(3\sqrt{2}, 2)$ से होकर गुजरता है, की उत्केन्द्रता है _____.

27. Answer the following questions : 1×4=4

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) What is the general solution of the differential equation $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + y$?

अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + y$ का व्यापक हल क्या है?

(b) Find the equation of the normal to the curve $ay^2 = x^3$ at the point (am^2, am^3).

वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(c) Find the area of the region bounded by the curve $y = x^2$ and the line $y = 4$.

वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(d) Find the derivative of $\sin x$ w.r.t. $\log x$.

$\log x$ के सापेक्ष $\sin x$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

28. Fill in the blanks : 1×4=4

रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) If A is a square matrix of order 2, then $|kA|$ is equal to _____.

यदि A कोटि 2 का एक वर्ग आव्यूह है, तो $|kA|$ बराबर है _____.

(b) If $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, then $F(x)F(y)$ is equal to F (_____).

यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ है, तो $F(x)F(y)$ बराबर है F (_____).

(c) If $x \in N$ and $\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 8$, then the value of x is _____.

यदि $x \in N$ और $\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 8$ है, तो x का मान है _____.

(d) If $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, then the cofactor of element (–7) is _____.

यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & -7 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो अवयव (–7) का सहखण्ड है _____.

29. Let $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ be the two vectors. Then—

(a) find $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

(b) find the unit vector perpendicular to both the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$;

(c) find the area of the parallelogram having $\vec{a}$ and $\vec{b}$ as diagonals;

(d) for the given vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, verify $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$;

(e) find $|2\vec{b} \times \vec{a}|$;

(f) for the given vectors, check if $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$. 1×6=6

माना $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ दो सदिश हैं। तब—

(क) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ज्ञात कीजिए;

(ख) सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् एकक सदिश ज्ञात कीजिए;

(ग) समान्तरचतुर्भुज, जिसके विकर्ण $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए;

(घ) दिए गए सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$;

(ङ) $|2\vec{b} \times \vec{a}|$ ज्ञात कीजिए;

(च) दिए गए सदिशों के लिए यह जाँचिए कि क्या $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ है।

SECTION–B

खण्ड–ब

30. Express the function $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$, $x \neq 0$ in the simplest form. 2

फलन $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$, $x \neq 0$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

Or / अथवा

Show that the function $f : R \to R$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x > 0 \\ 0, \text{ if } x = 0 \\ -1, \text{ if } x < 0 \end{cases}$$

is neither one-one nor onto.

दर्शाइए कि फलन $f : R \to R$, जो निम्न प्रकार से परिभाषित है, न तो एकैकी है और न ही आच्छादक :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x > 0 \\ 0, \text{ यदि } x = 0 \\ -1, \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$$

31. Find the equation of the hyperbola whose eccentricity is $\sqrt{2}$. 2

अतिपरवलय, जिसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

32. Show that $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$. 2

दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

33. For any matrix A of order 3 × 3, prove that $(A')' = A$. 2

सिद्ध कीजिए कि $(A')' = A$, जहाँ A कोटि 3 × 3 का एक आव्यूह है।

34. Consider the binary operation $* : R \times R \to R$ defined as $a * b = |a - b|$, $\forall\ a, b \in R$. Check if the operation $*$ is *(a)* commutative, *(b)* associative or not. 2

एक द्वि-आधारी संक्रिया $* : R \times R \to R$ पर विचार कीजिए, जो $a * b = |a - b|, \forall\ a, b \in R$ द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए की संक्रिया $*$ (क) क्रमविनिमेय है या नहीं, (ख) सहचारी है या नहीं।

35. Find the equation of the line passing through the intersection of the lines $x + y = 5$ and $2x - y - 7 = 0$, and parallel to *x*-axis. 2

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + y = 5$ और $2x - y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा *x*-अक्ष के समांतर है।

Or / अथवा

Find the distance between the lines $2x + 3y = 4$ and $4x + 6y = 20$.

रेखाओं $2x + 3y = 4$ और $4x + 6y = 20$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

36. Find the point on the curve $y = x^2 - 4x + 5$, where tangent to the curve is parallel to *x*-axis. 2

वक्र $y = x^2 - 4x + 5$ का वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर वक्र पर बनी स्पर्श-रेखा, *x*-अक्ष के समान्तर है।

Or / अथवा

Find the interval in which the function f given by $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 17$ is decreasing.

वह अन्तराल ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 17$ ह्रासमान है।

37. Write the following statements in the form 'if $\cdots$ then' : 1×2=2

(a) It never rains when it is cold.

(b) A quadrilateral is a parallelogram if its diagonals bisect each other.

निम्नलिखित कथनों को 'यदि $\cdots$ तो' के रूप में लिखिए :

(क) जब ठंड होती है, तो कभी वर्षा नहीं होती।

(ख) एक चतुर्भुज, समांतरचतुर्भुज होता है यदि इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

38. If $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ and $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, then find $|\vec{b}-\vec{a}|$. 2

यदि $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ तथा $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ है, तो $|\vec{b}-\vec{a}|$ ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the point on the line $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}$ at a distance $3\sqrt{2}$ from the point $(1, 2, 3)$.

रेखा $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु $(1, 2, 3)$ से दूरी $3\sqrt{2}$ हो।

39. Find the eccentricity of the hyperbola whose latus rectum is 8 and conjugate axis is equal to half the distance between the foci. 4

उस अतिपरवलय, जिसका नाभिलंब 8 है और संयुग्मी अक्ष की लम्बाई दोनों नाभियों के बीच की दूरी की आधी है, की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

40. Using matrix method, solve the following system of equations : 4

आव्यूह विधि के प्रयोग से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x+y-3z=13$$
$$3x+2y+z=4$$
$$x+2y-z=8$$

41. Show that the four points A, B, C and D, whose position vectors are $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$, $-\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ and $-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ respectively, are coplanar. 4

दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C और D, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$, $-\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ और $-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ हैं, समतलीय हैं।

Or / अथवा

Reduce the equation of the plane $4x-5y+6z-60=0$ to the *(a)* intercept form and find its intercepts on the axes and *(b)* normal form and find the length of the perpendicular from the origin to the plane.

समतल $4x-5y+6z-60=0$ के समीकरण को परिवर्तित कीजिए (क) अन्तःखण्ड रूप में और निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों को भी ज्ञात कीजिए तथा (ख) अभिलंब रूप में और मूलबिन्दु से समतल तक लंब की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

42. Let N be the set of all natural numbers and let R be a relation on $N \times N$ defined by $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \ \forall \ (a, b), (c, d) \in N \times N$. Show that R is an equivalence relation on $N \times N$. 4

माना N सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और $N \times N$ पर एक संबंध R है जो $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \ \forall \ (a, b), (c, d) \in N \times N$ द्वारा परिभाषित है। दर्शाइए कि R, $N \times N$ पर एक समतुल्य संबंध है।

43. Prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ divide the area of the square bounded by $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ and $y = 0$ into three equal parts. 4

सिद्ध कीजिए कि $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ और $y = 0$ से घिरे वर्ग के क्षेत्रफल को वक्र $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

Or / अथवा

Solve $\sec^2 y(1 + x^2) dy + 2x \tan y \, dx = 0$, given that $y = \frac{\pi}{4}$, when $x = 1$.

$\sec^2 y(1 + x^2) dy + 2x \tan y \, dx = 0$ को हल कीजिए, दिया गया है कि $x = 1$ पर $y = \frac{\pi}{4}$ है।

44. Verify Lagrange's mean value theorem for the function f defined as $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval $[2, 4]$. 6

फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ के लिए, अन्तराल $[2, 4]$ में, लग्रांज के माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Or / अथवा

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = e^{1-x^2}$ in the interval $[-1, 1]$.

फलन $f(x) = e^{1-x^2}$ के लिए, अन्तराल $[-1, 1]$ में, रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

45. Minimize and maximize $Z = 5x + 2y$ subject to the following constraints : 6

निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत $Z = 5x + 2y$ का न्यूनतमीकरण और अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x - 2y \le 2, \ 3x + 2y \le 12, \ -3x + 2y \le 3$$
$$x \ge 0, \ y \ge 0$$

Or / अथवा

A farmer has a supply of two chemical fertilizers A and B. Fertilizer of type A contains 10% nitrogen and 5% phosphoric acid. Fertilizer of type B contains 6% nitrogen and 10% phosphoric acid. After testing the soil conditions of the field, it is found that at least 14 kg of nitrogen and 14 kg of phosphoric acid are required for producing a good crop. Fertilizer of type A costs ₹ 5 per kg and type B costs ₹ 3 per kg. How many kg of each type of fertilizer should be used to meet the requirement at the minimum possible cost? Formulate the situation as an LPP. Also, obtain the feasible region corresponding to the constraints.

एक किसान के पास दो तरह के रासायनिक उर्वरकों A और B की आपूर्ति है। A प्रकार के उर्वरक में 10% नाइट्रोजन और 5% फॉस्फोरिक एसिड होता है। B प्रकार के उर्वरक में 6% नाइट्रोजन और 10% फॉस्फोरिक एसिड होता है। खेत की मिट्टी की स्थिति का परीक्षण करने के बाद यह पाया गया कि अच्छी फसल पैदा करने के लिए कम-से-कम 14 कि० ग्रा० नाइट्रोजन और 14 कि० ग्रा० फॉस्फोरिक एसिड की आवश्यकता होती है। A प्रकार के उर्वरक की कीमत ₹ 5 प्रति कि० ग्रा० और B प्रकार के उर्वरक की कीमत ₹ 3 प्रति कि० ग्रा० है। न्यूनतम संभव लागत पर आवश्यकता को पूरा करने के लिए प्रत्येक प्रकार के कितने कि० ग्रा० उर्वरक का उपयोग किया जाना चाहिए? इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए। प्रतिबन्धों के अंतर्गत सुसंगत क्षेत्र को भी ज्ञात कीजिए।

★ ★ ★